



**LISBOA  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**

**MESTRADO**  
**ECONOMETRIA APLICADA E PREVISÃO**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**  
**DISSERTAÇÃO**

**ASSIMETRIAS NOS CICLOS ECONÓMICOS: MODELAÇÃO  
NÃO LINEAR DO PIB DE ALGUNS PAÍSES**

**GABRIEL FLORIN ZSURKIS**

**SETEMBRO 2013**



**LISBOA  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**

**MESTRADO EM  
ECONOMETRIA APLICADA E PREVISÃO**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO  
DISSERTAÇÃO**

**ASSIMETRIAS NOS CICLOS ECONÓMICOS: MODELAÇÃO  
NÃO LINEAR DO PIB DE ALGUNS PAÍSES**

**GABRIEL FLORIN ZSURKIS**

**ORIENTAÇÃO:**

**PROF. DOUTOR ARTUR C. B. DA SILVA LOPES**

**SETEMBRO 2013**

## Resumo

O comportamento dinâmico de muitas séries macroeconómicas depende do estado da economia, sendo necessário recorrer a modelos não-lineares para o caracterizar de forma adequada. Os modelos STAR (*Smooth Transition AR*) permitem modelar estes efeitos assimétricos, possibilitando uma transição suave entre os dois regimes extremos.

Esta dissertação pretende investigar a existência de não-linearidades nos ciclos económicos de vários países. Na última fase da análise empírica estimam-se modelos STAR para a taxa de crescimento do PIB de cada um deles, seguindo o ciclo de modelação proposto por Teräsvirta (1994) e Van Dijk et al. (2002).

Os vários testes de linearidade realizados fornecem evidência de não-linearidades na taxa de crescimento do PIB para a grande maioria dos países, sendo a evidência contra a hipótese nula de linearidade mais forte que em Bradley e Jansen (2000). No entanto, tal como neste trabalho, não foi possível encontrar características comuns nos ciclos económicos dos países estudados. A heterogeneidade revela-se quer na utilização de modelos adequados diferentes quer, para o mesmo modelo, em estimativas bastante diferentes dos parâmetros e dos números de defasamentos.

A utilização dos modelos STAR permite, com uma única exceção (China), melhorar o ajustamento aos dados. A redução da variância residual relativamente ao modelo AR é, em sete dos doze países estudados, superior a 10%.

## Abstract

Since the dynamic behaviour of several macroeconomic series depends on the state of the economy, nonlinear models are needed to characterize it. STAR models (*Smooth Transition AR*) allow modelling these asymmetrical effects, making possible a smooth transition between the two regimes.

The purpose of this dissertation is to investigate business cycle nonlinearities for several countries. In the final stage of the empirical analysis, STAR models for its real GDP growth rates are estimated, following the modelling cycle devised by Teräsvirta (1994) and Van Dijk et al. (2002).

Linearity tests provide evidence of nonlinear dynamics for the GDP growth rate of most countries, with evidence against the null hypothesis of linearity stronger than in Bradley and Jansen (2000). However, as in this work, it was not possible to find common business cycle characteristics for the countries under scrutiny. Heterogeneity shows up through different adequate models and also through rather different parameter estimates and lag numbers.

With the exception of China, STAR models produce a much better fit to the data. In 7 out of the 12 analyzed countries, the estimated residual variance is reduced more than 10% relatively to the (linear) AR model.

## **Agradecimentos**

Agradeço ao meu orientador, o Professor Doutor Artur C. B. da Silva Lopes, pela preciosa ajuda na definição do tema da dissertação, pela sua disponibilidade e seus conselhos, indispensáveis à conclusão deste trabalho.

Agradeço também à Catarina e à minha família, pelo apoio e compreensão inestimáveis que demonstraram nestes últimos meses.

# Conteúdo

<b>1. Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos metodológicos .....</b>	<b>4</b>
2.1. Representação .....	4
2.2. Testes de raízes unitárias.....	8
2.2.1. Testes ADF .....	8
2.2.2. Testes de raiz unitária contra alternativas não-lineares.....	10
2.3. Ciclo de Modelização .....	12
2.3.1. Especificação .....	13
2.3.2. Estimação .....	19
2.3.3. Avaliação .....	20
<b>3. Análise empírica .....</b>	<b>25</b>
3.1. Introdução.....	25
3.2 Resultados dos Testes de Raiz Unitária .....	26
3.3. Resultados da fase de especificação.....	27
3.4. Modelos estimados.....	29
3.5. Resultados dos Testes de Especificação dos modelos STAR .....	32
<b>4. Conclusões .....</b>	<b>34</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>36</b>
<b>Anexo A – Tabelas .....</b>	<b>39</b>
<b>Anexo B – Figuras .....</b>	<b>49</b>

## Lista de Tabelas

Tabela I - Países incluídos na análise .....	39
Tabela II - Resultados dos testes ADF de raízes unitárias .....	40
Tabela III - Resultado dos testes de raíz unitárias contra alternativas não lineares .....	41
Tabela IV - Resultado dos testes de linearidade das séries em diferenças .....	42
Tabela V - Resultado dos testes de linearidade das séries em nível .....	43
Tabela VI - Modelos seleccionados .....	43
Tabela VII - Modelos LSTAR1 estimados .....	44
Tabela VIII - Modelos LSTAR2 estimados .....	45
Tabela IX - Raízes dos polinómios característicos dos regimes extremos dos modelos LSTAR1 .....	46
Tabela X - Raízes dos polinómios característicos dos regimes extremos dos modelos LSTAR2 .....	47
Tabela XI - Resultados dos testes de especificação .....	48
Tabela XII - Rácio da variância residual dos modelos STAR e AR .....	48

## Lista de Figuras

Figura 1 - Valores da função de transição de modelos LSTAR1 .....	49
Figura 2 - Valores da função de transição de modelos LSTAR2 .....	49
Figura 3 - Funções de transição e Funções de Distribuição Empíricas dos modelos LSTAR1 .....	50
Figura 4 - Funções de transição e Funções de Distribuição Empíricas dos modelos LSTAR2 .....	50



## 1. Introdução

A teoria económica e vários estudos empíricos sugerem que o comportamento dinâmico de muitas séries macroeconómicas é não-linear. No estudo dos ciclos económicos é conhecida a existência de efeitos assimétricos, com as variáveis a terem comportamentos distintos nas contracções e expansões.

Segundo Harding e Pagan (2008), Burns e Mitchell<sup>1</sup> definem os ciclos de uma dada série macroeconómica em termos dos pontos de viragem na sua trajectória amostral. Assim, à variável em estudo deve ser retirada a sua componente “permanente”, de forma a considerar apenas as flutuações transitórias em torno da tendência de longo prazo. O ciclo de crescimento resultante depende do método utilizado para extrair essa componente, sendo também comum optar-se pelo estudo da série das primeiras diferenças da variável.

A assimetria dos ciclos económicos tem sido investigada por vários autores, com recurso a diversos procedimentos estatísticos. Neftci (1984) testou a assimetria entre as expansões e as contracções através do estudo das probabilidades de transição de um regime para o outro. Sichel (1993) distingue dois tipos de assimetria e apresenta testes estatísticos para cada um deles. O primeiro, denominado *steepness*, reflecte-se em declives diferentes durante as duas fases do ciclo económico. O segundo,

---

<sup>1</sup> Adopta-se a convenção de indicar em nota de rodapé as referências indicadas por outros autores mas não lidas. Burns, A. ,Mitchell (1946). Measuring Business Cycles. New York: National Bureau of Economic Research.

denominado *deepness*, ocorre quando a distância da média do ciclo ao “pico” é diferente da distância da média ao “vale”.

A teoria das séries temporais tem sido dominada, até recentemente, por modelos lineares. No entanto, Morley e Piger (2005) mostram, através de simulação, que os modelos lineares AR ou ARMA não conseguem modelar certas características observadas dos ciclos económicos, sendo necessária a utilização de modelos não-lineares. Em particular, os modelos AR ou ARMA apenas são capazes de gerar flutuações cíclicas simétricas.

Actualmente, com os avanços computacionais que permitem estimá-los facilmente, vários modelos não-lineares têm sido utilizados para caracterizar as dinâmicas das diversas fases do ciclo económico. Um grupo de modelos não-lineares muito utilizado são os modelos de *regime switching*, que permitem diferentes regimes que podem depender do estado da economia. Esta classe de modelos engloba os modelos TAR (*Threshold AR*), SETAR (*Self-Exciting AR*), e os modelos CDR de Beaudry e Koop (1993) e “*floor and ceiling*” de Pesaran e Potter (1997), que podem ser vistos como casos particulares dos modelos TAR. Nestes modelos, a transição entre regimes é efectuada de forma instantânea. Os modelos autoregressivos de transição suave (STAR) generalizam os anteriores, permitindo uma transição suave entre regimes.

Bradley e Jansen (2000) investigaram, através dos modelos STAR e CDR (*Current Depth of Recession*), os ciclos económicos de 26 países e encontraram uma grande heterogeneidade nas dinâmicas das suas taxas de crescimento do produto, que se

reflecte quer na utilização de modelos diferentes<sup>2</sup> quer, para o mesmo modelo, em estimativas bastante diferentes dos parâmetros.

Tal como em Bradley e Jansen (2000), esta dissertação tem como objectivo investigar a existência de não-linearidades (na média) nos ciclos económicos de vários países, através da utilização dos modelos STAR, quando a hipótese de linearidade é rejeitada.

O capítulo seguinte tem como objectivo apresentar, de forma sucinta, a metodologia utilizada na análise empírica. Em 2.1 são expostos os diferentes modelos STAR e discutidas as suas características. De seguida, são apresentados os testes de raiz unitária tradicionais e os testes de raiz unitária contra alternativas não lineares propostos por Kapetanios et. al (2003). Por último, é apresentado o ciclo de modelação proposto por Teräsvirta (1994). Este ciclo, baseado no proposto por Box-Jenkins para os modelos lineares, consiste em três fases: a fase de especificação, a de estimação e a de avaliação.

O terceiro capítulo pretende estudar, através da metodologia abordada no capítulo dois, a existência de não-linearidades nos ciclos económicos dos países apresentados na Tabela I.

---

<sup>2</sup> Alguns países são caracterizados pelo modelo LSTAR (*Logistic Smooth Transition AR*), outros pelo modelo ESTAR e ainda outros, pelo modelo CDR.

## 2. Aspectos metodológicos

Este capítulo está organizado em três partes. Em 2.1 são apresentadas as diferentes formas do modelo STAR e suas características. De seguida (em 2.2) são apresentados os conhecidos testes ADF de raiz unitária e, por último, é discutido o ciclo de modelização proposto por Teräsvirta (1994).

### 2.1. Representação

O modelo STAR (*Smooth Transition AR*) pertence à família de modelos de regressão não lineares, *regime-switching*, que permitem que o comportamento dinâmico e as propriedades estatísticas do processo sejam diferentes em cada um dos regimes.

O modelo de regressão *regime-switching* univariado, sem variáveis exógenas, que tem como variável de transição a variável dependente desfasada  $d$  períodos, é conhecido por modelo SETAR (*Self Exciting TAR*) e é definido pela seguinte expressão:

$$y_t = \boldsymbol{\phi}' \mathbf{w}_t + \boldsymbol{\theta}' \mathbf{w}_t I(y_{t-d} < c) + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{w}_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ ,  $\mathbf{w}_t = (1, \widetilde{\mathbf{w}}_t)$ ,  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p)'$  e  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p)'$  são os vectores de parâmetros de dimensão  $((p+1) \times 1)$ ;  $u_t \sim iid N(0, \sigma^2)$  e  $I(\cdot)$  é a função indicatriz.

Em geral, as variações nas séries macroeconómicas devem-se a alterações no comportamento de um número muito grande de agentes, que dificilmente reagem em

simultâneo a um dado estímulo económico<sup>3</sup>. Para caracterizar este fenómeno, é então necessário o uso de modelos que permitam um ajustamento gradual. O modelo SETAR pode ser generalizado de forma a permitir que a transição do processo entre os dois regimes seja realizada de forma suave e não imediata, dando origem ao modelo STAR. Segundo Terasvirta (2004), o modelo STR<sup>4</sup> é uma generalização do modelo de regressão com dados seccionais apresentado por Bacon e Watts<sup>5</sup>, em que a transição de uma linha de regressão para outra é suave e função de uma variável de transição contínua. Terasvirta (2004), refere ainda que o modelo STAR univariado foi introduzido na literatura das séries temporais por Chan e Tong<sup>6</sup>.

O modelo STAR univariado é dado por

$$y_t = \phi'w_t + \theta'w_t G(y_{t-d}, \gamma, c) + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.2)$$

onde  $w_t$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $u_t$  foram definidos anteriormente e  $G(\cdot)$  é a função de transição entre os dois regimes, que generaliza a função indicatriz.

A função de transição é uma função contínua, limitada entre 0 e 1, que depende da variável de transição. Assume-se que a variável de transição é um elemento de  $\widetilde{w}_t$  (Terasvirta (1994)), neste caso, a variável dependente desfasada  $d$  períodos ( $y_{t-d}$ ). O parâmetro  $\gamma$  determina a forma e o declive da função de transição e a rapidez com que a transição entre os regimes extremos é efetuada. O vetor  $c = (c_1, \dots, c_k)$ , com  $c_1 \leq \dots \leq c_k$ , é um vetor de parâmetros de localização, que indicam os pontos em que

---

<sup>3</sup> Devido, por exemplo, à especificidade do mercado em que cada agente se insere.

<sup>4</sup> O modelo STR (*Smooth Transition Regression*) tem, para além dos termos autoregressivos presentes no modelo STAR, variáveis exógenas.

<sup>5</sup> Bacon, D. W. e Watts, D. G. (1971). Estimating the transition between two intersecting straight lines, *Biometrika* 58: 525-534.

<sup>6</sup> Chan, K. S. e Tong, H. (1986). On estimating thresholds in autoregressive models, *Journal of Time Series Analysis* 7: 178-190.

as transições são realizadas. Para cada valor de  $G(y_{t-d}, \mathbf{c}, \gamma)$ , o modelo STAR é linear, podendo ser interpretado como um modelo AR com os seguintes coeficientes estocásticos:  $\phi + \theta G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c})$ .

As características do modelo e a forma como a transição entre os dois regimes é efectuada variam com a função de transição escolhida. As funções de transição normalmente utilizadas são a função logística e a função exponencial. A função logística genérica é dada por<sup>7</sup>:

$$G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c}) = \left\{ 1 + \exp \left[ -\gamma \prod_{k=1}^K (y_{t-d} - \mathbf{c}) \right] \right\}^{-1}, \gamma > 0. \quad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) definem, em conjunto, o modelo LSTAR. Os valores de  $K$  normalmente escolhidos são  $K = 1$  e  $K = 2$ .

Com  $K = 1$ , obtém-se o modelo LSTAR1. A função de transição é monotonamente crescente em função da variável de transição  $y_{t-d}$ , o que permite caracterizar comportamento assimétrico. Um exemplo típico da utilização do modelo LSTAR1 é o do estudo dos ciclos económicos, onde as expansões e as recessões apresentam um comportamento dinâmico distinto. Quando  $\gamma \rightarrow +\infty$ , a função logística de primeira ordem aproxima-se da função indicatriz  $I(\cdot)$  e o modelo LSTAR1 aproxima-se do modelo SETAR com dois regimes.

O modelo LSTAR2 ( $K = 2$ ) tem características distintas e, segundo van Dijk (2004), é adequado para os casos em que o comportamento dinâmico é idêntico para valores elevados e baixos de  $y_{t-d}$  (em relação a  $\mathbf{c}$ ), e diferente para os valores intermédios. A

---

<sup>7</sup> A restrição  $\gamma > 0$  é uma restrição de identificação.

função de transição é simétrica em redor do valor mínimo  $y_{t-d} = (c_1 + c_2)/2$ . Este valor varia entre 0 (quando  $\gamma \rightarrow +\infty$ ) e 1/2 (quando  $c_1 = c_2$  e  $\gamma < \infty$ ). Quando  $\gamma \rightarrow +\infty$  e  $c_1 \neq c_2$ ,  $G(y_{t-d}, \gamma, c) = 0$  para  $c_1 < y_{t-d} < c_2$  e  $G(y_{t-d}, \gamma, c) = 1$  para os restantes valores de  $y_{t-d}$ , dando origem ao modelo SETAR com três regimes em que os dois regimes extremos (com  $G(y_{t-d}, \gamma, c) = 1$ ) são idênticos.

Como alternativa ao modelo LSTAR2, pode utilizar-se o modelo ESTAR, dado pela expressão (2.2) em conjunto com a função de transição exponencial,

$$G(y_{t-d}, \gamma, c) = 1 - \exp[-\gamma(y_{t-d} - c)]^2. \quad (2.4)$$

Esta função é simétrica em redor de  $y_{t-d} = c$ , tende para 1 quando  $y_{t-d} \rightarrow \pm\infty$ , e tem como vantagem sobre a função logística de segunda ordem o facto de ter menos um parâmetro. Quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , o modelo ESTAR aproxima-se do modelo AR, pois  $G(y_{t-d}, \gamma, c) = 0$  apenas para  $y_{t-d} = c$  e  $G(y_{t-d}, \gamma, c) = 1$  para os restantes valores de  $y_{t-d}$ . Assim, o modelo ESTAR não é uma boa aproximação do modelo LSTAR2 quando  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $c_2 - c_1 > 0$ .

Algumas séries económicas (do produto, do consumo, etc.) exibem uma tendência crescente com o tempo. Um dos processos que permite representar este comportamento é o processo de estacionaridade em tendência. O modelo STAR univariado com tendência determinística pode ser definido da seguinte forma:

$$y_t = a + bt + v_t, \\ v_t = \phi'z_t + \theta'z_t G(v_{t-d}, \gamma, c) + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{z}_t = (v_{t-1}, \dots, v_{t-p})'$ ,  $a$  e  $b$  são, respetivamente, os coeficientes da constante e da tendência determinística,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $u_t$  e  $G(\cdot)$  foram definidos anteriormente. Os desvios em relação à tendência são não-lineares, tendo uma transição suave entre dois regimes em função do valor de  $v_{t-d}$  (desvio em relação à tendência desfasado).

## 2.2. Testes de raízes unitárias

### 2.2.1. Testes ADF

Os testes de linearidade contra os modelos STAR propostos por Luukonen et al. (1988) e Terasvirta (1994) assumem a estacionaridade das séries em estudo. Segundo Kilic (2004), se a estacionaridade não se verificar e a série tiver uma raiz unitária, a distribuição dos testes de linearidade é diferente<sup>8</sup> da habitual  $\chi^2$ , e o uso dos valores críticos desta distribuição pode levar a rejeições “espúrias” da linearidade. É, portanto, necessário realizar os testes de raiz unitária antes de avançar para os testes de linearidade.

Os testes de raiz unitária mais populares são os testes de Dickey e Fuller (DF). Nestes testes, os modelos utilizados para testar a existência de uma raiz unitária dependem dos pressupostos assumidos em relação ao processo gerador de dados, existindo três opções possíveis: modelo AR(1) sem termos determinísticos, modelo AR(1) com média não nula e modelo AR(1) com média não nula e tendência determinística. Para o último caso, o modelo tem a expressão

$$y_t = a + bt + \rho y_{t-1} + u_t, \quad (2.6)$$

---

<sup>8</sup> Envolve processos de Wiener e tem caudas mais pesadas do que a distribuição do  $\chi^2$ .



e pode ser reparametrizado da seguinte forma:

$$\Delta y_t = a + bt + \phi y_{t-1} + u_t, \quad (2.7)$$

onde  $\phi = \rho - 1$ .

A regressão (2.7) permite testar a estacionaridade dos desvios em relação à tendência.

As hipóteses a testar são, naturalmente,  $H_0: \phi = 0$  e  $H_1: \phi < 0$ . Sob  $H_0$ , a estatística de teste  $t^\tau = \hat{\phi}/se(\hat{\phi})$  segue uma distribuição de Dickey-Fuller.

A dinâmica do modelo (2.6) pode não ser suficiente para caracterizar as séries em estudo, ou seja, os erros podem ser autocorrelacionados tornando a inferência baseada nas estatísticas DF inválida. Se a série segue um processo AR(p) deve ser utilizada a seguinte regressão:

$$\Delta y_t = a + bt + \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t. \quad (2.8)$$

O teste realizado com base na regressão (2.8) é denominado de teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Depois de escolher o número máximo de defasamentos, o valor de  $p$  pode ser determinado através de um critério de selecção de modelos (como o AIC ou SBIC), ou de um procedimento sequencial de testes de significância (GTS *t-sig*).

Segundo Hayashi (2000), em pequenas amostras é preferível a utilização do teste ADF-GLS que, para o modelo apresentado em (2.6), pode ser efectuado como se descreve de seguida. Considere-se o seguinte modelo:

$$y_t = \beta' x_t + \eta_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.9)$$

onde  $\beta = (a, b)'$ ;  $x_t = (1, t)'$ ; e  $\eta_t = \bar{\rho} \eta_{t-1} + u_t$ , com  $\bar{\rho} = 1 + \bar{c}/T$  e  $\bar{c} = -13,5$ . As estimativas GLS de  $\beta$  são obtidas da regressão de

$$y_1, y_2 - \bar{\rho}y_1, \dots, y_t - \bar{\rho}y_{t-1} \text{ sobre } x_1, x_2 - \bar{\rho}x_1, \dots, x_t - \bar{\rho}x_{t-1}. \quad (2.10)$$

O estimador resultante é denominado  $\hat{\beta}_{GLS}$  e a regressão de teste ADF-GLS é a seguinte:

$$\tilde{y}_t = \rho\tilde{y}_{t-1} + \zeta_1\Delta\tilde{y}_{t-1} + \dots + \zeta_p\Delta\tilde{y}_{t-p+1} + erro, \quad (2.11)$$

com  $\tilde{y}_t = y_t - \hat{\beta}_{GLS}'x_t$ . As hipóteses a testar são:  $H_0: \rho = 1$  vs  $H_0: \rho < 1$ . A estatística  $t^\tau = (\hat{\rho} - 1)/se(\hat{\rho})$  tem uma distribuição diferente da distribuição DF. Os valores críticos desta distribuição estão tabelados em Elliott et al. (1996)<sup>9</sup>, onde se demonstra que, em pequenas amostras, a potência do teste ADF-GLS é significativamente maior do que a potência do teste ADF.

### 2.2.2. Testes de raiz unitária contra alternativas não-lineares

Quando a série em estudo segue um processo não-linear estacionário, a potência dos testes ADF é baixa, não permitindo rejeitar a hipótese nula de existência de raiz unitária. Diversos autores propuseram novos testes de raiz unitária que consideram, na hipótese alternativa, modelos não-lineares (veja-se Leybourne et al. (1998), Vougas (2006), Kapetanios et al. (2003)).

O teste proposto por Kapetanios et al. (2003), apresentado de seguida, permite testar a existência de uma raiz unitária contra a alternativa de modelo STAR globalmente estacionário. Os autores referem que o teste é assintoticamente similar em relação à presença de termos determinísticos, sendo por isso possível considerar a

---

<sup>9</sup> Elliott, G., Rothenberg, T. e Stock, J. (1996), Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root, *Econometrica*, 64(4): 813-836.

hipótese alternativa de processo STAR estacionário em tendência, utilizando a seguinte regressão:

$$\Delta \hat{v}_t = \lambda \hat{v}_{t-1} + \pi \hat{v}_{t-1} G(\hat{v}_{t-d}, \gamma) + \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j \Delta \hat{v}_{t-j} + u_t, \quad (2.12)$$

onde  $\hat{v}_t = y_t - \hat{a} - \hat{b}t$ , com  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  estimativas OLS de  $a$  e  $b$  da equação (2.5). O processo  $\hat{v}_t$  tem média nula assumindo-se, por isso, que a transição entre os regimes extremos é efectuada no ponto  $c = 0$ .

O  $p$  é escolhido através de um critério de informação (por exemplo, BIC ou AIC), ou de um procedimento sequencial de testes de significância. Em relação à variável de transição, os autores sugerem que se escolha o valor de  $d$ , com  $1 \leq d \leq d_{max}$ , que maximiza a bondade de ajustamento.

Impondo  $\lambda = 0$  e assumindo que a condição  $-2 < \pi < 0$  se verifica, o processo é globalmente estacionário se  $\gamma > 0$ , sendo as hipóteses a testar  $H_0: \gamma = 0$  contra  $H_1: \gamma > 0$ . Todavia, não é possível efetuar este teste, pois  $\pi$  não é identificado sob  $H_0$ . Para contornar este problema, substitui-se a função de transição  $G(\hat{v}_{t-d}, \gamma)$  por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno de  $\gamma = 0$  (Luukonen et al.), dando origem às seguintes regressões auxiliares:

$$\Delta \hat{v}_t = \psi \hat{v}_{t-1} T_1(\hat{v}_{t-d}, \gamma) + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta \hat{v}_{t-j} + erro, \quad (2.13)$$

$$\text{ESTAR : } \Delta \hat{v}_t = \psi_E \hat{v}_{t-1} \hat{v}_{t-d}^2 + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta \hat{v}_{t-j} + erro, \quad (2.14)$$

$$\text{LSTAR1} : \Delta \hat{v}_t = \psi_L \hat{v}_{t-1} \hat{v}_{t-d} + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta \hat{v}_{t-j} + \text{erro}, \quad (2.15)$$

onde  $T_1$  é a expansão em serie de Taylor de  $G(\hat{v}_{t-d}, \gamma)$  em torno de  $\gamma = 0$ .

A expressão (2.13) sugere a utilização do teste  $t_{NL} = \hat{\psi}/s.e.(\hat{\psi})$  para testar  $H_0: \psi = 0$  contra  $H_1: \psi < 0$ . Mas, sob  $H_0$ , a distribuição da estatística de teste, obtida pelos autores, é diferente da habitual *t-student*, envolvendo processos de Wiener.

Os autores concluem, através de simulação de Monte Carlo<sup>10</sup>, que o teste acima apresentado tem maior potência do que o teste ADF quando o processo é muito persistente.

### 2.3. Ciclo de Modelização

Perante a existência de uma grande variedade de modelos não lineares, vários autores optaram por adotar a metodologia Box-Jenkins<sup>11</sup>, que consiste em restringir a escolha a uma dada classe de modelos e desenvolver uma estratégia coerente de modelização dentro dessa classe. Como o modelo linear é um caso particular de vários modelos não lineares, tem sido utilizada a estratégia de modelação do particular para o geral, que sugere que se comece por estimar um modelo linear e se avance para a especificação de um modelo não linear apenas nos casos em que o primeiro se revela inadequado.

---

<sup>10</sup> Tendo como hipótese alternativa o modelo ESTAR globalmente estacionário.

<sup>11</sup> Box, G. E. e Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco.

Terasvirta(1994) e Van Dijk et al. (2002) definiram uma estratégia de modelação para os modelos STAR. É comum o ciclo de modelização agregar as seguintes três fases: especificação, estimação e avaliação, descritas nos pontos que se seguem.

### **2.3.1. Especificação**

Segundo van Dijk et al. (2002) a fase da especificação destes modelos tem como objectivos principais testar o modelo linear AR contra o modelo não linear STAR e escolher o tipo de modelo STAR utilizado. Esta fase pode ser dividida em quatro etapas: especificação do modelo linear AR, realização dos testes de linearidade, escolha da variável de transição e escolha da forma da função de transição.

#### **2.3.1.1. Especificação do modelo linear**

Na primeira etapa, a escolha da ordem do modelo AR é efetuada através de um critério de informação (AIC ou BIC), e deve ter em conta o comportamento dos erros, pois a existência de autocorrelação nos mesmos pode afectar a potência dos testes de linearidade (Terasvirta (1994)) e levar a rejeições “espúrias” da hipótese nula (de linearidade). Por outro lado, segundo Bradley e Jansen (2000), a especificação de um modelo linear para modelar uma série gerada através de um modelo não linear poderá também resultar em autocorrelação residual.

### 2.3.1.2. Testes de linearidade

Sendo o modelo AR um caso particular do modelo STAR, deve começar-se por verificar se o primeiro consegue descrever de forma adequada a série em estudo. Se o modelo AR for apropriado, é preferível a sua utilização, por ser mais parcimonioso e ter o suporte teórico mais desenvolvido.

Uma das formas de expressar a hipótese nula nos modelos STAR é através de  $H_0: \gamma = 0$ . Neste teste de hipóteses existem parâmetros perturbadores apenas identificados sob  $H_1: \gamma > 0$  ( $\theta$  e  $c$  não são restringidos sob  $H_0$ ), que impossibilitam a utilização da teoria assintótica habitual. A distribuição da estatística de teste sob  $H_0$  não é conhecida, sendo possível obtê-la apenas por simulação (veja-se Hansen (1999) para os modelos SETAR).

Luukkonen et al (1988) propõem, como forma de resolver o problema da identificação, a substituição da função de transição por uma expansão em série de Taylor em torno de  $\gamma = 0$ .<sup>12</sup> Na equação reparametrizada, deixa de haver parâmetros perturbadores e a linearidade pode ser testada com recurso à estatística de teste LM.

Segundo van Dijk (2002), esta abordagem tem duas vantagens importantes: não é necessário estimar o modelo sob  $H_1$ , e pode recorrer-se à teoria assintótica habitual para obter os valores críticos assintóticos.

As expansões em série de Taylor normalmente utilizadas são de primeira e terceira ordens. A literatura recomenda a utilização da expansão de terceira ordem, pois o

---

<sup>12</sup> Para a função logística de primeira ordem, a função de transição é substituída por  $G^*(y_{t-d}, \gamma, c) = G(y_{t-d}, \gamma, c) - \frac{1}{2}$  de forma que  $G^*(y_{t-d}, \gamma, c) = 0$  para  $\gamma = 0$ .

teste que utiliza a expansão de primeira não tem potência para o vetor de parâmetros  $\theta = (\theta_0, 0, \dots, 0)'$ .

A substituição da função de transição pela sua expansão em série de Taylor de terceira ordem resulta no teste proposto por Terasvirta (1994), denominado LM-STR em Bradley e Jansen (2000), que tem a seguinte regressão auxiliar:

$$y_t = \beta_0' \mathbf{w}_t + \sum_{j=1}^3 \beta_j' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d}^j + e_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.16)$$

com  $\mathbf{w}_t = (1, \tilde{\mathbf{w}}_t)$ ,  $e_t = u_t + \theta' \mathbf{w}_t R_3(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c})$ , onde  $R_3$  é o resto da aproximação em série de Taylor e  $\beta_j$  são funções de  $\theta$  e  $\mathbf{c}$ . A hipótese nula  $\gamma = 0$  equivale a testar  $\beta_j = \mathbf{0}, j = 1, 2, 3$ , o que implica que  $e_t = u_t$ . Portanto, as hipóteses a testar são:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \mathbf{0} \quad vs. \quad H_1: \exists \beta_j \neq \mathbf{0}, j = 1, 2, 3.$$

A estatística LM tem, sob  $H_0$ , uma distribuição assintótica  $\chi^2$  com  $3p$  graus de liberdade, e pode ser calculada da seguinte forma:

1. Estimar o modelo  $y_t = \beta_0' \mathbf{w}_t + u_t$  e calcular  $SSR_0 = \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$ ;
2. Estimar o modelo  $y_t = \beta_0' \mathbf{w}_t + \beta_1' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d} + \beta_2' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d}^2 + \beta_3' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d}^3 + e_t$  e calcular  $SSR_1 = \sum_{t=1}^T \hat{e}_t^2$ ;
3. Calcular a versão  $\chi^2$  da estatística:

$$LM = \frac{T(SSR_0 - SSR_1)}{SSR_0}. \quad (2.17)$$

Terasvirta (2004) recomenda, devido aos problemas de dimensão e potência da versão  $\chi^2$  da estatística em pequenas amostras, o uso da aproximação  $F$  da mesma:

$$LM_F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/3(p+1)}{SSR_0/(T - (4p+1))} , \quad (2.18)$$

que, sob  $H_0$ , tem uma distribuição  $F - Snedcor$  com  $3(p+1)$  e  $(T - (4p+1))$  graus de liberdade.

Kaufmann et al. (2012) concluem, através de simulação de Monte Carlo, que os testes de linearidade apresentados anteriormente continuam a ser úteis quando na hipótese alternativa está um modelo STAR estacionário em tendência como (2.5). De seguida serão apresentados os testes de linearidade utilizados no artigo referido.

O primeiro teste, denominado teste de Zhang pelos autores, utiliza a mesma regressão auxiliar que o teste de Terasvirta (1994), mas para a variável  $\hat{v}_t = y_t - \hat{a} - \hat{b}t$ , com  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  estimativas OLS de  $a$  e  $b$ :

$$\hat{v}_t = \tilde{\beta}_0' \mathbf{z}_t + \sum_{j=1}^3 \tilde{\beta}_j' \tilde{\mathbf{z}}_t \hat{v}_{t-d}^j + \tilde{e}_t , \quad t = 1, \dots, T , \quad (2.19)$$

onde  $\tilde{\mathbf{z}}_t = (\hat{v}_{t-1}, \dots, \hat{v}_{t-p})'$ ,  $\mathbf{z}_t = (1, \tilde{\mathbf{z}}_t)$  e  $\tilde{\beta}_j$  são funções de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{c}$ . A hipótese nula a testar é  $H_0: \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = \mathbf{0}$ , e a estatística de teste tem uma distribuição  $\chi^2$  com  $3p$  graus de liberdade, quando  $H_0$  é verdadeira.

No segundo teste, desenvolvido pelos autores e por eles denominado teste TI, o termo de tendência determinística é incluído na regressão auxiliar e a função de transição  $G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c})$  é substituída por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno de  $\gamma = 0$ . As regressões de teste propostas são:

$$\text{ESTAR: } y_t = \beta_0' \mathbf{w}_t + bt + \beta_1' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d} + \beta_2' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d}^2 + \xi_t, \quad (2.20)$$

$$\text{LSTAR1: } y_t = \beta_0' \mathbf{w}_t + bt + \beta_1' \tilde{\mathbf{w}}_t y_{t-d} + \xi_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.21)$$



As respectivas hipóteses nulas são  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \mathbf{0}$  e  $H_0: \beta_1 = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{w}_t$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_t$ , e  $b$  foram definidos anteriormente. As estatísticas de teste LM têm distribuição  $\chi^2$  com  $2p$  e  $p$  graus de liberdade, respectivamente. Segundo os autores, as estatísticas TI têm maior potência que a estatística de Zhang na maioria das situações.

Assumindo que a variável de transição é  $\alpha' \tilde{\mathbf{w}}_t$ , ou seja, uma combinação linear de elementos de  $\tilde{\mathbf{w}}_t$ , com  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$  o vector que define a combinação linear, a substituição da função logística de primeira ordem por uma expansão de Taylor de terceira ordem em torno de  $\gamma = 0$  resulta na seguinte regressão auxiliar:

$$y_t = \beta'_0 \mathbf{w}_t + \pi' \tilde{\mathbf{w}}_t \tilde{\mathbf{w}}_t' + \kappa' \tilde{\mathbf{w}}_t \tilde{\mathbf{w}}_t' \tilde{\mathbf{w}}_t + \zeta_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.22)$$

com  $H_0: \pi = \kappa = \mathbf{0}$ . A estatística LM tem, sob  $H_0$ , uma distribuição assintótica  $\chi^2$  com  $p(p+1)/2 + p(p+1)(p+2)/6$  graus de liberdade. Quando  $p$  aumenta, o número de graus de liberdade torna-se muito elevado, o que pode causar problemas em pequenas amostras. Em Bradley e Jansen (2000) utiliza-se este teste, denominado LST, com o vector que define a combinação linear de elementos de  $\tilde{\mathbf{w}}_t$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, \dots, 0)$ .

Os testes até agora apresentados têm na hipótese alternativa um modelo específico, o modelo STAR. Uma versão popular do teste RESET permite testar a linearidade *versus* a hipótese alternativa de não-linearidade geral através da regressão

$$y_t = \beta'_0 \mathbf{w}_t + \sum_{j=2}^3 \varphi_j' \tilde{\mathbf{w}}_t^j + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.23)$$

A hipótese nula é  $H_0: \varphi_j = \mathbf{0}$  e a estatística de teste tem, quando esta é verdadeira, distribuição  $F(2p, T - (2p + 1))$ .

### 2.3.1.3. Escolha da variável de transição

Terasvirta (1994) propõe, para a escolha da variável de transição, que se repita o teste de linearidade para um conjunto considerado adequado de variáveis de transição,  $Y = \{y_{t-1}, \dots, y_{t-d_{max}}\}$ , com  $1 \leq d \leq d_{max}$  e, caso se rejeite a hipótese de linearidade, que se escolha a variável de transição com valor-p mínimo. O mesmo autor refere, como justificação da utilização desta estratégia, que quando a variável de transição verdadeira é seleccionada, a regressão auxiliar é correcta e a potência do teste é maior. Segundo van Dijk et al. (2002), o facto desta estratégia não permitir o controlo da dimensão do teste<sup>13</sup> não é problemático quando o principal objectivo é a especificação de um modelo, e não apenas o teste da linearidade em sentido estrito.

### 2.3.1.4. Escolha da forma do modelo

Uma vez determinada a variável de transição, utiliza-se a regressão auxiliar (2.14) para escolher entre o modelo LSTAR1 e ESTAR ou LSTAR2. Segundo Terasvirta (1994,2004) e Terasvirta et al. (2010), a análise da expressão dos parâmetros da regressão auxiliar, que são função dos parâmetros do modelo STAR original, permite concluir que, mesmo com  $c \neq 0$ , se o modelo for o LSTAR1,  $\beta_2$  continua mais próximo do vetor nulo do que os vetores  $\beta_1$  ou  $\beta_3$ , pelo que, sugerem a seguinte sequência de testes de hipóteses:

- $H_{04}: \beta_3 = 0$   $H_{14}: \beta_3 \neq 0$
- $H_{03}: \beta_2 = 0 \mid \beta_3 = 0$   $H_{13}: \beta_2 \neq 0 \mid \beta_3 = 0$

---

<sup>13</sup> Pois, para cada repetição do teste de linearidade, o valor-p é calculado assumindo que  $d$  é conhecido.

- $H_{02}: \beta_1 = 0 \mid \beta_2 = \beta_3 = 0$        $H_{12}: \beta_1 \neq 0 \mid \beta_2 = \beta_3 = 0$

Calcula-se o valor-p das aproximações  $F$  associadas a cada uma das hipóteses acima e selecciona-se o caso em que a rejeição, medida pelo valor-p, é mais forte. Se isso acontecer para a hipótese nula  $H_{03}$ , é seleccionado o modelo LSTAR1; caso contrário, deve escolher-se o modelo ESTAR ou LSTAR2.

### 2.3.2. Estimação

Uma vez escolhidas a variável e a função de transição avança-se para a segunda fase do ciclo de modelização, a fase de estimação. Os parâmetros do modelo (2.2) podem ser estimados através do método da máxima verosimilhança condicional. Terasvirta(2004) propõe, para maximizar o logaritmo da verosimilhança, a utilização do algoritmo BFGS<sup>14</sup>.

É importante, para facilitar a convergência do algoritmo, obter bons valores iniciais dos parâmetros. O modelo STAR é linear nos parâmetros para valores fixos de  $\gamma$  e  $c$ , o que sugere a construção de uma grelha para os valores destes. Estimam-se os parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  condicionais nos parâmetros  $\gamma$  e  $c$  (ou  $\gamma, c_1$  e  $c_2$ , para o modelo LSTAR2) para todas as combinações possíveis dos últimos e calcula-se a soma dos quadrados dos resíduos. Os valores iniciais a utilizar são aqueles que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos.

Na construção da grelha de procura, deve-se ter atenção ao facto de o parâmetro  $\gamma$  depender da escala da variável de transição. Terasvirta(2004) refere que

---

<sup>14</sup> Para uma descrição deste algoritmo veja-se, por exemplo, Hendry, D. (1995). *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press, Oxford, apêndice A5.

este parâmetro deve ser dividido, para a função logística genérica, pelo desvio padrão amostral da variável de transição ( $y_{t-d}$ ) elevado a  $K$ , de forma a facilitar a construção da grelha de procura. A função de transição passa a ter a seguinte forma:

$$G(y_{t-d}, \gamma, c) = \left\{ 1 + \exp \left[ -\gamma / \hat{\sigma}_{y_{t-d}}^K \prod_{k=1}^K (y_{t-d} - c) \right] \right\}^{-1}, \gamma > 0 . \quad (2.24)$$

A estimativa do parâmetro  $\gamma$  torna-se difícil quando o seu valor é elevado. Como foi referido anteriormente (secção 2.1), quando  $\gamma$  é elevado, a função de transição aproxima-se da função indicatriz e são necessárias muitas observações na vizinhança de  $c$  (ou  $c_1$  e  $c_2$ , no caso do modelo LSTAR2) para o estimar de forma precisa, pois variações elevadas no valor de  $\gamma$  têm um efeito pequeno na forma da função de transição. A falta de precisão reflecte-se em valores elevados do desvio padrão e (consequentemente) valores baixos da estatística  $t$ , que não deve ser interpretado como uma evidência de ausência de não linearidade pois, como foi visto na secção 2.3.1.2, não é possível testar a significância estatística de  $\gamma$  recorrendo à teoria assintótica habitual.

### 2.3.3. Avaliação

A avaliação do modelo pode ser realizada através da análise empírica à estimação do modelo, da análise das características dinâmicas do modelo e de testes de especificação.

Caso existam sintomas de sobre-especificação, com desvios padrões dos estimadores dos parâmetros  $\phi_i$  e  $\theta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) elevados, a dimensão do modelo

pode ser reduzida recorrendo as seguintes restrições:  $\phi_i = \theta_i = 0$ , que permite eliminar a variável  $y_{t-i}$  do vetor  $\mathbf{w}_t$ ;  $\phi_i = 0$ , que permite excluir a variável  $y_{t-i}$  do regime  $G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c}) = 0$ ;  $\phi_i = -\theta_i$  iguala a variável a zero para  $G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c}) = 1$  e a restrição  $\theta_i = 0$  retira a variável da parte não linear  $(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{w}_t)$  do modelo STAR.

A análise das características dinâmicas (de curto prazo) do modelo pode ser realizada através da análise das raízes dos polinómios característicos nos regimes  $G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c}) = 0$  e  $G(y_{t-d}, \gamma, \mathbf{c}) = 1$ .

Os testes de especificação utilizados neste tipo de modelo são o teste de ausência de autocorrelação, o teste de não linearidade adicional e testes de estabilidade de parâmetros. A teoria assintótica dos testes anteriores apenas é válida quando a consistência e a normalidade assintótica dos estimadores se verificam.

### 2.3.3.1. Teste de ausência de autocorrelação

Segundo Terasvirta (2004), este teste é um caso particular do teste apresentado por Godfrey (1988)<sup>15</sup>. O modelo geral é dado por:

$$y_t = M(\mathbf{w}_t; \boldsymbol{\psi}) + u_t \quad (2.25)$$

$$u_t = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{v}_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T$$

onde  $M(\mathbf{w}_t; \boldsymbol{\psi})$  é uma função continua, pelo menos duas vezes diferenciável em função dos parâmetros em todo o espaço amostral;  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)'$  é um vector de parâmetros,  $\mathbf{v}_t = (u_{t-1}, \dots, u_{t-q})'$  e  $u_t \sim iid N(0, \sigma^2)$ .

---

<sup>15</sup> Godfrey, L.G. (1988). *Misspecification Tests in Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge.

A hipótese nula de ausência de autocorrelação  $H_0: \alpha = \mathbf{0}$  é testada contra a hipótese alternativa de autocorrelação até à ordem  $q$ .

O modelo STAR satisfaz a condição de diferenciabilidade para  $\gamma < \infty$ . Em resumo, o teste consiste em efectuar a regressão dos resíduos estimados,  $\hat{u}_t$ , do modelo STAR estimado sobre os resíduos desfasados  $\hat{u}_{t-1}, \dots, \hat{u}_{t-q}$  e a as derivadas parciais da função do logaritmo da verossimilhança  $(\partial M(\mathbf{w}_t; \hat{\psi})/\partial \psi)$  avaliadas no valor maximizante  $\psi = \hat{\psi}$ . Devido aos problemas de dimensão e potência da versão  $\chi^2$  da estatística em pequenas amostras, Terasvirta(2004) recomenda a aproximação  $F$  da estatística LM, dada pela seguinte expressão:

$$F_{LM} = \{(SSR_0 - SSR_1)/q\}/\{SSR_1/(T - n - q)\}, \quad (2.26)$$

onde  $n$  é o número de parâmetros da regressão auxiliar acima descrita,  $SSR_0$  e  $SSR_1$  são, respectivamente, a soma dos quadrados dos resíduos do modelo STAR e a soma dos quadrados dos resíduos da regressão auxiliar acima descrita.

### 2.3.3.2. Teste de não-linearidade adicional

Após a estimação do modelo não linear, é importante averiguar se este caracteriza de forma adequada as propriedades não lineares do processo em análise. Com esse objectivo, utiliza-se um teste de não linearidade adicional. Este teste pode ser efectuado considerando um modelo STAR aditivo com mais um regime, definido pela expressão

$$y_t = \phi' \mathbf{w}_t + \theta' \mathbf{w}_t G(\gamma_1, c_1, y_{1t-d}) + \psi' \mathbf{w}_t H(\gamma_2, c_2, y_{2t-d}) + u_t, \quad (2.27)$$

onde  $H(\gamma_2, c_2, y_{2t-d})$  é uma segunda função de transição com  $H(0, c_2, y_{2t-d}) = 0$  e  $u_t \sim iid N(0, \sigma^2)$ . Assim, a hipótese nula a testar é  $H_0: \gamma_2 = 0$ . Neste teste existe o mesmo problema analisado nos testes de linearidade pois, sob  $H_0$ , os parâmetros  $c_2$  e  $\psi$  não são identificados. A solução do problema de identificação consiste, tal como nos testes de linearidade, na substituição da função de transição  $H(\gamma_2, c_2, y_{2t-d})$  por uma expansão em série de Taylor em redor de  $\gamma_2 = 0$ . Optando-se por uma expansão em série de Taylor de terceira ordem, tem-se a seguinte regressão auxiliar:

$$y_t = \phi' w_t + \theta' w_t G(\gamma_1, c_1, y_{1t-d}) + \sum_{j=1}^3 \beta_j' \tilde{w}_t y_{2t-d}^j + u_t^* \quad (2.28)$$

onde  $u_t^* = u_t + \psi' w_t R_3(\gamma_2, c_2, y_{2t-d})$  é o resto da expansão em série de Taylor. A hipótese nula a testar é:  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ .

A regressão auxiliar do teste é obtida através da regressão dos resíduos  $\hat{u}_t$  do modelo sob  $H_0$  sobre os regressores auxiliares  $\tilde{w}_t y_{2t-d}^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , e as derivadas parciais da função do logaritmo da verosimilhança  $(\partial M(w_t; \hat{\psi}) / \partial \psi)$ . O teste LM resultante tem uma distribuição assintótica de  $\chi^2$  com  $3p$  graus de liberdade, mas é preferível, mais uma vez, a utilização da aproximação  $F$ .

O teste apresentado acima permite testar restrições ao modelo STR. Considere-se, por exemplo, que na estimação do modelo STAR se considerou  $\phi^{(0)} = 0$ , com  $\phi^{(0)}$  e  $\theta^{(0)}$  subconjuntos de  $\phi$  e  $\theta$ . A validade da restrição  $\phi^{(0)} = 0$  pode ser testada utilizando um teste LM a partir da regressão:

$$y_t = \phi^{(1)'} w_t^{(1)} + \theta' w_t G(\gamma_1, c_1, y_{1t-d}) + \phi^{(0)'} w_t^{(0)} + u_t \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{w}_t = (\mathbf{w}_t^{(0)'}, \mathbf{w}_t^{(1)'})'$ , e  $\mathbf{w}_t^{(i)}$  são as variáveis correspondentes de  $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ ,  $i = 0, 1$ .

Este teste pode ser adaptado para testar a restrição  $\boldsymbol{\phi}^{(0)} = -\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ .

### 2.3.3.3. Teste de Estabilidade dos Parâmetros

A hipótese de estabilidade dos parâmetros é uma hipótese fundamental em qualquer modelo de regressão, e a sua falha pode indicar uma má especificação do modelo. A alternativa à estabilidade dos parâmetros permite uma transição suave nos parâmetros em função da tendência linear e tem como caso particular uma quebra estrutural abrupta nos parâmetros. Considere-se o seguinte modelo:

$$y_t = \boldsymbol{\phi}(t)' \mathbf{w}_t + \boldsymbol{\theta}(t)' \mathbf{w}_t G(\gamma, c, y_{t-d}) + u_t, \quad \gamma > 0, \quad (2.30)$$

onde  $\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\lambda}_\phi H(\gamma_\phi, \mathbf{c}_\phi, t^*)$  e  $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\lambda}_\theta H(\gamma_\theta, \mathbf{c}_\theta, t^*)$ ,  $t^* = t/T$ ,  $H(\gamma_\phi, \mathbf{c}_\phi, t^*)$  e  $H(\gamma_\theta, \mathbf{c}_\theta, t^*)$  são funções de transição definidas entre 0 e 1, e  $u_t \sim iid N(0, \sigma^2)$ . Este modelo é denominado *TV – STAR*. A hipótese nula de estabilidade dos parâmetros é dada por  $H_0: \boldsymbol{\gamma}_\phi = \boldsymbol{\gamma}_\theta = \mathbf{0}$  e a hipótese alternativa por  $H_0: \boldsymbol{\gamma}_\phi > \mathbf{0}$  ou  $\boldsymbol{\gamma}_\theta > \mathbf{0}$ . Este teste permite também, assumindo que certos elementos de  $\boldsymbol{\lambda}_\phi$  e  $\boldsymbol{\lambda}_\theta$  são iguais a zero, testar a estabilidade de um subconjunto de parâmetros.

O modelo *TV – STAR* não é identificado sob  $H_0$ . A solução deste problema consiste, tal como nos testes de linearidade, em aproximar as funções de transição por uma expansão em série de Taylor em redor da hipótese nula. Por exemplo, a expansão em série de Taylor de primeira ordem da função de transição logística de terceira ordem em redor de  $\boldsymbol{\gamma}_\psi = \mathbf{0}$  (onde  $\psi = \phi, \theta$ ) permite obter, após reparametrização, a seguinte regressão auxiliar:



$$y_t = \beta'_0 + \sum_{j=1}^3 \beta'_j \{w_t(t^*)^j\} + \sum_{j=1}^3 \beta'_{j+3} \{w_t(t^*)^j\} G(\gamma, c, y_{t-d}) + u_t^*, \quad (2.31)$$

onde  $\beta_j = 0, j = 1, \dots, 6$ , apenas quando a hipótese nula  $H_0: \gamma_\phi = \gamma_\theta = 0$  se verifica.

A estatística de teste LM é obtida através da mesma metodologia utilizada anteriormente, sendo a regressão auxiliar obtida através da regressão de  $\hat{u}_t$  (ou  $y_t$ ) sobre  $v_t = [w_t', w_t' t^*, w_t' (t^*)^2, \dots, w_t' (t^*)^3 G(\gamma, c, y_{t-d})]'$ . Segundo Terasvirta, a estatística de teste tem uma distribuição assintótica de  $\chi^2$  com  $6(p+1)$  graus de liberdade. O mesmo autor, recomenda a utilização da aproximação  $F$  da estatística, devido aos problemas da  $\chi^2$  em pequenas amostras.

### 3. Análise empírica

#### 3.1. Introdução

A análise empírica tem como objectivo principal descobrir não-linearidades nos ciclos económicos de vários países. Os países analisados são apresentados na Tabela I, juntamente com o período estudado e a fonte dos dados. Na análise seguinte,  $y_t$  é o logaritmo do PIB real trimestral. A utilização de um teste de raízes unitárias com maior potência contra alternativas não lineares do que o teste ADF permite estudar a existência de não-linearidades nas séries do produto.

### 3.2 Resultados dos Testes de Raiz Unitária

A Tabela II apresenta os resultados dos testes ADF de raiz unitária. Os desfasamentos foram calculados para o teste ADF pelo GTS *t-sig* (se o último desfasamento não for significativo a 10%, reestima-se e analisam-se os resíduos<sup>16</sup>) e com base no AIC, e para o teste ADF-GLS com base no AIC. Consideram-se, nos três casos,  $p_{max} = 12$ .

Não é possível rejeitar a hipótese de raiz unitária nos três testes efectuados para doze das catorze séries estudadas. No caso da China, é possível rejeitar a hipótese nula a 5% para o teste ADF-GLS e a 10% para o teste ADF com o critério GTS *t-sig*. Para a Austrália, o teste ADF permite rejeitar a hipótese nula a 5% para os dois critérios de selecção utilizados.

A presença de raiz unitária contra a alternativa de modelo STAR globalmente estacionário em tendência foi testada através do teste  $t_{NL}$  proposto por Kapetanios et al. (2003) e apresentado na secção 2.2. Na elaboração dos testes considerou-se  $d_{max} = 5$  e escolheu-se o  $d$  que maximiza o  $R^2$  da regressão (2.7). Para a escolha do  $p$  utilizou-se o critério de selecção SBIC<sup>17</sup>, com  $p_{max} = 12$ .

Na Tabela III são apresentados os resultados dos testes de raiz unitária de Kapetanios et al. (2003). Das 14 séries estudadas, é apenas possível rejeitar a hipótese nula ao nível de significância de 1% para a China e de 5% para a Austrália<sup>18</sup>.

---

<sup>16</sup> A análise da autocorrelação até à ordem 8 foi efectuada com os testes de Breush-Godfrey e Ljung-Box.

<sup>17</sup> Para os casos em que o  $AR(p)$  escolhido pelo SBIC tem problemas de autocorrelação, seguiu-se o procedimento utilizado em 3.3 para especificar, nas mesmas condições, o modelo AR de  $\Delta y_t$ . No caso da China, o BIC escolhe o  $p_{max}$ , mas a autocorrelação persiste.

<sup>18</sup> A hipótese alternativa é, para os dois países, modelo ESTAR globalmente estacionário

### 3.3. Resultados da fase de especificação

Na especificação do modelo AR referente a cada uma das séries, utilizou-se o critério de selecção SBIC, com  $p_{max} = 11$  para as séries em diferenças e  $p_{max} = 12$  para as séries em nível, testando-se a existência de autocorrelação até à ordem 8, com recurso às estatísticas de teste de Breush-Godfrey e de Ljung-Box. Quando se encontram sintomas de autocorrelação o  $p$  é aumentado sucessivamente uma unidade, até que o problema desapareça. No caso da China, não foi possível especificar um modelo linear sem autocorrelação<sup>19</sup> o que, segundo Bradley e Jansen (2000), não invalida a estimação de um modelo não linear, pois será sujeito a vários testes de especificação na fase da avaliação.

O teste baseado na regressão auxiliar (2.16) (LM-STR) assume particular importância, pois permite obter uma estimativa do  $d$  e, através da sequência de testes de hipóteses apresentada na secção 2.3.1, escolher a forma da função de transição. Na escolha do  $d$ , seguiu-se Bradley e Jansen (2000) e optou-se por  $d_{max} = 4$  para as séries em diferenças.

A linearidade de  $\Delta y_t$  foi testada através dos testes de linearidade LM-STR, RESET e LST. A Tabela IV resume os resultados das primeiras três etapas da fase da especificação para as séries em diferenças. Das 14 séries estudadas, não se rejeita a linearidade em nenhum dos três testes para duas séries (E.U.A. e Canadá), o que sugere que o modelo AR caracteriza de forma adequada o ciclo económico destes países, não sendo necessária a estimação de um modelo STAR.

---

<sup>19</sup> O BIC selecciona o número máximo de desfasamentos, mas a autocorrelação persiste.

Nos doze países restantes existe alguma evidência de não linearidade da taxa de crescimento do PIB real. A hipótese nula é rejeitada em todos os testes realizados para cinco países: Espanha, Itália, África do Sul, China e Austrália; em quatro casos, Portugal Reino Unido, Alemanha e UE11 , é possível rejeitar a linearidade com dois dos testes (LM-STR e RESET para o primeiro e LM-STR e LST para os restantes três), e para os restantes quatro países, a hipótese nula é rejeitada apenas para o teste LM-STR.

A utilização de períodos amostrais diferentes reflecte-se em resultados diferentes dos de Bradley e Jansen (2000). No artigo referido não é possível rejeitar a hipótese nula de linearidade com nenhum dos três testes para a Espanha, E.U.A, França e Portugal, enquanto no presente trabalho isso acontece, destes quatro países, apenas para os E.U.A.. Dos doze países analisados nos dois trabalhos<sup>20</sup>, os resultados são idênticos nos três testes, para além do caso dos E.U.A, em apenas mais um caso, o da Alemanha. A hipótese nula é rejeitada mais vezes que em Bradley e Jansen (2000) com cada um dos três testes utilizados, mas o teste LM-STR continua a ser o que permite maior número de rejeições da hipótese nula, seguido do teste LST. O teste LM-STR permite rejeitar a linearidade em dez dos doze países referidos, o teste LST em seis e o teste RESET apenas em cinco<sup>21</sup>.

A linearidade das séries em nível será testada através dos testes utilizados em Kaufmann et al. (2012), apresentados em 2.3.1. Estes testes foram efectuados para os países para os quais o teste de Kapetanios et al. (2003) fornece evidência de estacionaridade em torno de uma tendência.

---

<sup>20</sup> Os países apresentados na Tabela I excluindo China e UE11.

<sup>21</sup> Em Bradley e Jansen (2000), o teste LM-STR rejeita a linearidade oito casos, o LST em cinco e o RESET em apenas três.

Na Tabela V são apresentados os resultados das primeiras três etapas da fase da especificação para as séries em nível. No caso da China, a linearidade é rejeitada nos três testes realizados. No caso da Austrália, ao contrário do que seria de esperar, pois os autores referem que este teste tem menos potência que os restantes dois na maioria das situações, apenas se consegue rejeitar a hipótese nula para o teste denominado teste de Zhang. Estes testes confirmam os indícios de não linearidade no produto dos dois países.

Na tabela Tabela VI encontram-se os modelos seleccionados para cada um dos países. A taxa de crescimento do PIB real de seis países parece ser melhor representada pelo modelo LSTAR1, enquanto a dos restantes seis países, pelo modelo ESTAR ou LSTAR2. Em quatro casos (África do Sul, Austrália, Coreia do Sul e Itália), coincidem com os modelos seleccionados em Bradley e Jansen (2000).

### **3.4. Modelos estimados**

O processo de especificação dos modelos STAR dos países para os quais se encontraram evidências de não-linearidades no ciclo económico inicia-se com os modelos AR obtidos na secção 3.3. Nos modelos STAR estimados para a Coreia do Sul, UE11, Alemanha e Japão, o número de *lags* da parte linear ( $\phi'w_t$ ) e da parte não linear ( $\theta'w_t$ ) é igual ao do modelo AR. Para seis países, vários desfasamentos não significativos da parte linear e/ou da parte não linear foram eliminados. Em dois casos, Itália e França, são necessários mais desfasamentos do que no modelo linear de forma a eliminar, respectivamente, os indícios de autocorrelação e de não linearidade-adicional. As taxas de crescimento do PIB da Alemanha, Japão e Espanha são

caracterizadas, no regime extremo com a função de transição igual a zero, por um processo AR com média nula ( $\phi_0 = 0$ ).

Os ciclos económicos dos países estudados parecem variar muito, com as não-linearidades de seis países a serem caracterizadas pelo modelo LSTAR1, e dos outros seis pelo modelo LSTAR2. A heterogeneidade revela-se também, para o mesmo modelo, em estimativas dos parâmetros e número de desfasamentos diferentes, que sugerem a existência de comportamentos dinâmicos distintos. Assim, não é possível encontrar características comuns nos comportamentos dinâmicos das taxas de crescimento do PIB dos países estudados.

Na Tabela VII e nas Figuras 1 e 3 são apresentados os modelos LSTAR1 estimados e as suas funções de transição. Estes modelos podem ser divididos em dois grupos, em função do valor de  $\hat{c}$ . No primeiro grupo de países (China, Espanha e França) o valor de  $\hat{c}$  varia entre -0.259% e 0.892%, e no segundo (Portugal, África do Sul e UE11) varia entre 1.530% e 3.041%.

A transição entre os dois regimes extremos é, em cinco casos (África do Sul, UE11, China, Portugal e França), muito rápida e o modelo LSTAR1 está muito próximo do modelo SETAR com dois regimes. No caso da Espanha, a transição é realizada de forma mais lenta ( $\hat{\gamma} = 5.795$ ).

Nos casos da China e da França a transição entre os dois regimes é efectuada, respectivamente, nos pontos  $\hat{c} = 0.072\%$  e  $\hat{c} = -0.259\%$ , permitindo associar um dos regimes a fase de recessão e o outro a fase de expansão. Estes dois países encontram-se em expansão durante a maior parte da amostra.

Os modelos LSTAR2 estimados são apresentados na Tabela VIII e as respectivas funções de transição nas Figuras 2 e 4. No caso da Alemanha  $\hat{c}_1 = -2.051\%$  e  $\hat{c}_2 = 0.593\%$ ; para três países (Austrália, Itália e Reino Unido)  $\hat{c}_1$  varia entre  $-0.047\%$  e  $-0.802\%$ , e  $\hat{c}_2$  entre  $2.324\%$  e  $3.537\%$ ; nos casos da Coreia do Sul e Japão,  $\hat{c}_1$  e  $\hat{c}_2$  assumem valores, em módulo, muito próximos, sendo a função de transição simétrica em redor de um ponto próximo de  $\Delta y_{t-d} = 0$ .

A transição entre os regimes extremos é, em quatro casos (Alemanha, Coreia do Sul, Japão e Reino Unido), muito rápida e o modelo LSTAR2 está muito próximo do modelo SETAR com três regimes, em que dois deles são idênticos (para  $G(\Delta y_{t-d}, \gamma, c) = 1$ ). Nos casos da Austrália e Itália, a transição ocorre de forma mais lenta, com  $\hat{\gamma} = 2.327$  para o primeiro e  $\hat{\gamma} = 1.482$  para o segundo país.

A maior parte dos coeficientes estimados são, em todos os modelos, estatisticamente significativos. Os parâmetros de localização estimados são, com a excepção de  $\hat{c}_1$  do Japão e do Reino Unido, estatisticamente significativos para todos os países estudados. O desvio padrão das estimativas de  $\gamma$  é, na maior parte dos casos, muito elevado devido aos valores elevados de  $\gamma$  (ver secção 2.3.2.).

A Tabela IX apresenta as raízes dos polinómios característicos nos dois regimes extremos dos modelos LSTAR1 estimados. Em dois casos (China e França), o modelo LSTAR1 é não estacionário para  $G(\Delta y_{t-d}, \gamma, c) = 0$  e estacionário para o regime extremo com valores positivos da taxa de crescimento do PIB. Assim, quando o ciclo económico destes dois países se encontra na fase de expansão, tende a permanecer nesta fase até ocorrer um choque negativo suficientemente forte que ative o regime

não estacionário. A taxa de crescimento do PIB destes dois países é maioritariamente caracterizada pelo regime estacionário do modelo LSTAR1.

Em três casos (Portugal, Espanha e África do Sul) acontece o contrário, com o regime  $G(\Delta y_{t-d}, \gamma, c) = 0$  estacionário e o outro regime extremo não estacionário, sendo a taxa de crescimento do PIB caracterizada, na maior parte da amostra, pelo regime estacionário.

A Tabela X apresenta as raízes dos polinómios nos regimes extremos dos modelos LSTAR2 estimados. Para quatro países (Alemanha, Coreia do Sul, Japão e Reino Unido), o processo é estacionário em todos os regimes extremos.

Nos restantes dois casos (Itália e Austrália), o processo é não estacionário para os regimes  $G(\Delta y_{t-1}, \gamma, c) = 1$  e estacionário para o regime  $G(\Delta y_{t-1}, \gamma, c) = 0$ , sendo que a função de transição destes dois países raramente é igual a um.

### **3.5. Resultados dos Testes de Especificação dos modelos STAR**

Os resultados dos testes de especificação são apresentados na Tabela XI. A análise da autocorrelação até a ordem 8 foi efectuada com o teste de ausência de autocorrelação (2.25). No teste de não linearidade adicional (2.28) considerou-se o conjunto de possíveis variáveis de transição utilizado para os testes de linearidade ( $Y = \{y_{t-1}, \dots, y_{t-4}\}$ ). Por último, para testar a estabilidade dos parâmetros dos modelos STAR estimados utilizaram-se, no teste (2.30), as funções de transição logísticas de primeira ( $H_1$ ), segunda ( $H_2$ ) e terceira ordem ( $H_3$ ).



Não existem indícios de autocorrelação residual para nenhum dos doze modelos estimados. No caso da China, rejeita-se a hipótese nula de não existência de não-linearidade adicional para todas as variáveis de transição possíveis, sugerindo que o modelo STAR (2.2) não é suficiente para caracterizar de forma adequada a não linearidade do ciclo económico. Nos casos de Japão, África do Sul, Espanha e UE11 a hipótese nula é rejeitada para apenas algumas variáveis de transição. Os modelos estimados parecem caracterizar de forma adequada as propriedades não lineares da taxa de crescimento do PIB dos restantes sete países.

A estabilidade dos parâmetros do modelo LSTAR2 da Alemanha é rejeitada para as três funções de transição utilizadas, nos casos da África do Sul e China é rejeitada para as funções logística de primeira e segunda ordem, para Portugal e Espanha a rejeição acontece quando no teste (2.30) se utiliza a função logística de primeira ordem e para a Itália quando se utiliza a função logística de terceira ordem. Nos restantes seis países, a estabilidade dos parâmetros não é rejeitada para nenhuma das funções utilizadas.

Os modelos estimados para a Austrália, Coreia do Sul, França e Reino Unido não apresentam nenhum problema de especificação. O problema de especificação mais comum é a falha da hipótese de estabilidade dos parâmetros, que afecta seis países. As falhas de especificação encontradas não são muito preocupantes, uma vez que o principal objectivo deste trabalho é detectar não-linearidades nos ciclos económicos e analisar as suas diversas formas, e não propriamente a estimação de modelos STAR óptimos.

Note-se que é possível observar uma melhoria do ajustamento em relação aos modelos AR para onze dos doze países estudados (Tabela XX). A melhoria mais significativa acontece para a Itália, com a variância residual do modelo LSTAR2 igual a apenas 64% da variância do modelo linear, ou seja, uma melhoria de 36%. Nos casos da Espanha, França e Japão, os modelos STAR permitem uma redução da variância residual ainda muito elevada, superior a 15%. A China representa a única exceção, com a variância residual do modelo LSTAR1 igual a 105% da variância do modelo AR.

#### **4. Conclusões**

Neste trabalho foram analisados, através de testes de linearidade e dos modelos STAR (Teräsvirta 1994, 2004), os comportamentos dinâmicos das taxas de crescimento do PIB real de vários países, de forma a detectar não-linearidades e verificar a existência de padrões comuns nos seus ciclos económicos.

Os vários testes de linearidade realizados fornecem evidência de não-linearidades na taxa de crescimento do PIB para a grande maioria dos países. O teste LM-STR permite rejeitar a hipótese de linearidade em 86% dos casos, enquanto em Bradley e Jansen (2000) isso acontece, considerando todos os países analisados, para apenas 69%. No entanto, as não-linearidades diferem muito, com o ciclo económico de alguns países a ser melhor caracterizado pelo modelo LSTAR1, e de outros, pelo modelo LSTAR2. A transição entre os regimes é, em geral, muito rápida e os modelos STAR estimados estão muito próximos dos modelos SETAR.

As diferenças nos ciclos económicos continuam a verificar-se entre os países caracterizados pelo mesmo modelo, e revelam-se em estimativas dos parâmetros e números de desfasamentos diferentes. Os resultados da análise empírica não permitem, portanto, reconhecer um padrão típico nos ciclos económicos dos países estudados, o que está de acordo com a conclusão de Bradley e Jansen (2000).

Um possível caminho de investigação adicional consiste em utilizar, para além dos modelos STAR, os modelos CDR, à semelhança do que acontece no artigo acima referido. Seria também interessante aprofundar o estudo do ciclo económico da China, uma vez que é o único caso em que o modelo não-linear não permite melhorar o ajustamento relativamente ao modelo AR.

## Bibliografia

- Beaudry, P. e Koop, G. (1993). Do recessions permanently change output?, *Journal of Monetary Economics*, 31 (2): 149-163.
- Bradley, M. D. e Jansen, D. W. (2000). Are business cycle dynamics the same across countries? Testing linearity around the globe, *Society for Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 4 (2): 51-71.
- Dias, F. C. (2003). Nonlinearities over the business cycle: an application of the smooth transition autoregressive model, Banco de Portugal, *Working Paper* 9 - 2003.
- Ghoshray, A. (2010). Smooth transition effects in price transmission: the case of international wheat export prices, *Economics Letters*, 106 (3): 169-171.
- Hansen, B. E. (1999). Testing for linearity, *Journal of Economic Surveys*, 13 (5), 551-76.
- Harding, D. e Pagan, A. (2006). Measurement of Business Cycles, Department of Economics - *Working Papers Series* 966, The University of Melbourne.
- Hayashi, F. (2000). *Econometrics*, Princeton University Press.
- Jansen, D. e Oh, W. (1999). Modeling nonlinearity of business cycles: choosing between the CDR and STAR models, *Review of Economics and Statistics*, 81(2): 344-349.
- Kapetanios, G., Shin, Y. e Snell, A. (2003). Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework, *Journal of Econometrics*, 112 (2): 359-379.
- Kaufmann, H., Kruse, R. e Sibbertsen, P. (2012). On tests for linearity against STAR models with deterministic trends, *Economics Letters*, 117 (1): 268-71.

- Kiliç, R. (2004), Linearity tests and stationarity, *Econometrics Journal*, 7 (1): 55-62.
- Leybourne, S.J., Newbold, P. e Vougas, D. (1998). Unit roots and smooth transitions, *Journal of Time Series Analysis*, 19 (1): 83-97.
- Lopes, A. S. (1999). Modelos DL e ADL, raízes unitárias e cointegração: Uma introdução, *Texto de Apoio 15*, CEMAPRE.
- Luukonen, R., Saikkonen, P. e Teräsvirta, T. (1988). Testing linearity against smooth transition autoregressive models, *Biometrika*, 75 (3), 491-499.
- Morley, J. e Piger, J. (2005). The importance of nonlinearity in reproducing business cycle features, *Working Papers 2004-032*, Federal Reserve Bank of St. Louis.
- Neftçi, S. N. (1984), Are economic time series asymmetric over the business cycle?, *Journal of Political Economy*, 92 (2): 307-328.
- Ocal, N. e Osborn, D. R. (2000). Business cycle nonlinearities in UK consumption and production, *Journal of Applied Econometrics*, 15 (1): 27-43.
- Pascalau, R. (2010). Unit root tests with smooth breaks: an application to the Nelson-Plosser data set, *Applied Economics Letters*, 17 (6): 565-570.
- Pesaran, M. H. e Potter, S. (1997). A floor and ceiling model of US output, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 21 (4): 661-695.
- Sichel, D. E. (1993). Business cycle asymmetry: a deeper look, *Economic Inquiry*, 31 (2): 224-236.
- Singh, T. (2012). Testing nonlinearities in economic growth in the OECD countries: an evidence from SETAR and STAR models, *Applied Economics*, 44 (30): 3887-3908.

- Teräsvirta, T. (1994). Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models, *Journal of the American Statistical Association*, 89 (425): 208-218.
- Teräsvirta, T. (2004). Smooth transition regression modelling, in Lütkepohl, H. e Krätzig, M.(eds.), *Applied Time Series Econometrics*, CUP, 222-241.
- Teräsvirta, T. (2005). Univariate nonlinear time series models, *Working Paper Series in Economics and Finance* 593, Stockholm School of Economics.
- Teräsvirta, T. e Anderson, H. A. (1992). Characterizing nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models, *Journal of Applied Econometrics*, 7 (S1): S119-S136.
- Teräsvirta, T. , Tjøseim, D. e Granger, Clive W. J. (2010). *Modelling nonlinear economic time series*, Oxford University Press.
- van Dijk, D., Teräsvirta, T. e Franses, P. H. (2002). Smooth transition autoregressive models — a survey of recent developments, *Econometric Reviews*, 21 (1): 1-47.
- Vougas, D. V. (2006). On unit root testing with smooth transitions, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51 (2): 797-800.
- Vougas, D. V. (2007). Is the trend in post-WW II US real GDP uncertain or non-linear? *Economics Letters*, 94 (3): 348–355.
- Yoon, G. (2009). It's all the miners' fault: on the nonlinearity in U.S. unemployment rates, *Economic Modelling*, 26 (6), 1449—54.
- Yoon, G. (2010), Nonlinearity in US macroeconomic time series, *Applied Economics Letters*, 17 (16): 1601-1609.

## Anexo A – Tabelas

**Tabela I** - Países incluídos na análise

País	Período	Observações	Fonte
África do Sul	1960 Q1 -2012 Q4	212	OCDE <sup>1</sup>
Austrália	1959 Q3 -2012 Q4	214	
Coreia do Sul	1970 Q1 -2012 Q4	172	
E.U.A	1947 Q1 -2012 Q4	264	
França	1978 Q1 -2012 Q4	140	
Reino Unido	1955 Q1 - 2012 Q4	232	
Alemanha	1980 Q1 - 2012 Q4	132	Datastream
Canadá	1980 Q1 - 2012 Q4	132	
China	1980 Q1 - 2012 Q4	132	
Espanha	1980 Q1 - 2012 Q4	132	
Itália	1980 Q1 - 2012 Q4	132	
Japão	1980 Q1 - 2012 Q4	132	
Portugal	1978 Q1 - 2011 Q4	136	Banco de Portugal <sup>2</sup>
UE 11	1970 Q1 - 2009 Q4	160	EABCN <sup>3</sup>

**Nota:**

O PIB real foi calculado utilizando o PIB nominal trimestral e o deflator do PIB trimestral corrigidos de sazonalidade disponíveis no *site* da OCDE

<sup>2</sup>Anexos do Boletim Económico, Verão 2012, Banco de Portugal; disponível no *site* do mesmo.

<sup>3</sup>Considera apenas os países que adoptaram a moeda única em 1999: Alemanha, Áustria, Bélgica, Espanha, Finlândia, França, Irlanda, Itália, Holanda, Luxemburgo e Portugal.

**Tabela II** - Resultados dos testes ADF de raízes unitárias

País	ADF- $t^{\tau}$		ADF-GLS - $t^{\tau}$
	AIC	GTS t-sig	AIC
África do Sul	-3.040	-3.040	-1.004
Alemanha	-1.273	-2.033	-1.603
Austrália	-3.467	-3.467	-1.185
Canadá	-2.244	-2.404	-2.011
China	-2.948	-3.403	-3.406
Coreia do Sul	-0.237	0.172	0.146
Espanha	-0.568	-0.568	-1.854
França	-1.361	-1.079	-1.472
E.U.A	-1.405	-1.405	-0.987
Itália	0.413	0.413	-0.304
Japão	-0.428	-1.259	-1.684
Portugal	0.295	0.295	-1.186
Reino Unido	-2.098	-2.378	-2.098
UE 11	-2.170	-2.170	-0.977

**Nota:** Os valores críticos a 5% dos testes ADF e ADF-GLS são, respectivamente, -3.41 e -2.89.



**Tabela III** - Resultado dos testes de raiz unitárias contra alternativas não lineares

País	AR(p)	valor-p BG(8)	Valor-p Q(8)	d	$t_{NL}$ LSTAR1	d	$t_{NL}$ ESTAR
África do Sul	4*	0.246	0.435	5	1.194	2	-2.790
Alemanha	1	0.454	0.537	1	0.603	5	-2.642
Austrália	8*	0.201	0.998	3	1.651	1	-3.569
Canadá	1	0.371	0.568	5	-0.579	1	-2.883
China	11	0.000	0.000	1	1.031	1	-5.637
Coreia do Sul	1	0.632	0.737	4	-1.298	4	0.117
Espanha	3	0.123	0.157	4	-2.491	1	0.759
França	2	0.775	0.798	4	-2.023	1	-0.165
E.U.A	1	0.299	0.276	5	-0.788	5	-0.966
Itália	1	0.076	0.055	5	-1.850	2	1.163
Japão	1	0.087	0.309	2	1.085	1	-2.436
Portugal	4	0.122	0.681	1	-1.950	1	0.780
Reino Unido	2*	0.155	0.151	1	-1.591	1	-2.063
UE 11	1	0.519	0.552	5	0.801	5	-2.991

**Nota:** Os valores críticos deste teste são -3.93 a 1%, -3.40 a 5% e -3.13 a 10%.

Para os países da coluna AR(p) que têm asterisco, foi considerado um número de desfasamentos superior ao escolhido pelo SBIC, para evitar os problemas de autocorrelação. Nos casos de Austrália e do Reino Unido o SBIC sugere  $p=0$  e é necessário, respectivamente,  $p=8$  e  $p=2$  para eliminar a autocorrelação, e para a África do Sul SBIC escolhe dois lags mas são necessários quatro para eliminar a autocorrelação.

No caso da China o SBIC selecciona o número de lags máximo, mas os sintomas de autocorrelação não desaparecem.

**Tabela IV** - Resultado dos testes de linearidade das séries em diferenças

País	Modelo linear AR			Testes de linearidade			
	AR(p)	BG(8)	Q(8)	LM-STR valor-p mínimo	d	RESET valor-p	LST valor-p
África do Sul	4*	0.266	0.442	0.003	1	0.029	0.010
Alemanha	1	0.466	0.537	0.007	2	0.777	0.001
Austrália	8	0.224	0.997	0.001	1	0.017	0.000
Canadá	1	0.369	0.569	0.304	-	0.583	0.530
China	11	0.000	0.020	0.000	4	0.000	0.001
Coreia do Sul	1	0.635	0.738	0.029	4	0.239	0.383
Espanha	3	0.131	0.168	0.000	3	0.000	0.001
França	2	0.758	0.798	0.012	1	0.058	0.349
E.U.A	1	0.301	0.276	0.091	-	0.898	0.289
Itália	1	0.085	0.057	0.000	1	0.000	0.000
Japão	1*	0.092	0.309	0.000	2	0.631	0.197
Portugal	4	0.129	0.680	0.005	4	0.031	0.255
Reino Unido	2*	0.163	0.152	0.004	1	0.106	0.003
UE 11	1	0.526	0.552	0.005	4	0.587	0.036

**Nota:** Para os países da coluna AR(p) assinalados com asterisco foi considerado um número de desfasamentos superior ao escolhido pelo SBIC, para evitar os problemas de autocorrelação. Nos casos da Austrália e do Reino Unido o SBIC sugere  $p=0$  e é necessário, respectivamente,  $p=8$  e  $p=2$  para eliminar a autocorrelação, e para a África do Sul o SBIC escolhe dois lags mas são necessários quatro para eliminar a autocorrelação. No caso da China, o SBIC selecciona o número de lags máximo mas os sintomas de autocorrelação não desaparecem. Para a Itália, como o valor-p da estatística BG(8) do modelo escolhido pelo SBIC é inferior a 0.10, acrescentou-se um desfasamento, mas os resultados dos testes de linearidade não se alteram.

Embora o SBIC indique, para a Alemanha e para o Japão,  $p = 0$  e não existem indícios de autocorrelação considerou-se, nos dois casos,  $p = 1$  de forma a permitir a realização dos três testes de linearidade.

**Tabela V** - Resultado dos testes de linearidade das séries em nível

Modelo linear AR				Resultados testes de linearidade					
				TI LSTAR1		TI ESTAR		ZHANG	
País	p	BG(8)	Q(8)	valor-p	d	valor-p	d	valor-p	d
Austrália	9	0.423	0.999	0.521	4	0.603	4	0.003	5
China	12	0.000	0.000	0.031	5	0.000	5	0.000	4

**Nota:** No caso da Austrália, o SBIC sugere  $p = 0$ , mas é necessário  $p=9$  para eliminar a autocorrelação.

**Tabela VI** - Modelos seleccionados

País	Modelo
África do Sul	LSTAR1
Alemanha	ESTAR ou LSTAR2
Austrália	ESTAR ou LSTAR2
China	LSTAR1
Coreia do Sul	ESTAR ou LSTR2
Espanha	LSTAR1
França	LSTAR1
Itália	ESTAR ou LSTAR2
Japão	ESTAR ou LSTAR2
Portugal	LSTAR1
Reino Unido	ESTAR ou LSTAR2
UE11	LSTAR1

**Tabela VII – Modelos LSTAR1 estimados**

	África do Sul	China	Espanha	França	Portugal	UE11
$R^2$	0.190	0.417	0.444	0.519	0.275	0.288
$\hat{\sigma}_u^2$	0.962	1.731	0.375	0.133	0.841	0.309
$\hat{\sigma}_{y_{t-d}}$	0.981	1.675	0.798	0.493	1.111	0.608
<b>Coefficientes estimados</b>						
$\phi_0$	0.395 (3.878)	4.668 (5.328)	-	-10.572 (-3.664)	0.213 (1.915)	0.250 (4.174)
$\phi_1$	0.100 (1.289)	-0.883 (-4.567)	0.234 (2.428)	-4.320 (-2.912)	-0.011 (-0.134)	0.506 (7.132)
$\phi_2$	0.248 (3.741)	-0.156 (-1.094)	0.387 (5.622)	-0.297 (-0.362)	0.136 (1.743)	-
$\phi_3$	0.153 (2.293)	0.941 (3.774)	-	3.591 (2.313)	0.277 (3.696)	-
$\phi_4$	-	-	-	-1.020 (-1.304)	0.230 (2.607)	-
$\phi_5$	-	-	-	6.889 (4.328)	-	-
$\phi_6$	-	-	-	5.422 (2.780)	-	-
$\theta_0$	7.127 (3.606)	-2.920 (-3.077)	1.484 (4.755)	10.816 (3.748)	-10.944 (-2.930)	1.010 (3.861)
$\theta_1$	-2.109 (-3.983)	0.811 (3.851)	-0.900 (-4.327)	4.617 (3.109)	3.507 (2.317)	-1.147 (-3.678)
$\theta_2$	-	0.587 (3.523)	-	0.605 (0.732)	-	-
$\theta_3$	-	-1.097 (-4.192)	-	-3.658 (-2.351)	-	-
$\theta_4$	-	-	-	1.024 (1.301)	-	-
$\theta_5$	-	-	-	-6.915 (-4.336)	-	-
$\theta_6$	-	-	-	-5.463 (-2.797)	-	-
$\gamma$	811.799 (0.462)	53.942 (0.638)	5.795 (1.663)	13.192 (1.787)	38.563 (0.523)	194.651 (0.142)
$c_1$	2.607 (468.835)	0.072 (2.137)	0.892 (7.883)	-0.260 (-6.511)	3.041 (43.153)	1.530 (11.435)

**Nota:** A estatística  $t$  do coeficiente é apresentada entre parênteses.

**Tabela VIII – Modelos LSTAR2 estimados**

	Alemanha	Austrália	Coreia do Sul	Itália	Japão	Reino Unido
$R^2$	0.186	0.214	0.167	0.518	0.227	0.118
$\hat{\sigma}_u^2$	0.742	0.966	2.599	0.301	1.020	0.929
$\hat{\sigma}_{y_{t-d}}^2$	0.874	1.162	3.000	0.5421	1.268	1.017
<b>Coefficientes estimados</b>						
$\phi_0$	-	0.996 (6.122)	0.885 (3.995)	0.201 (2.432)	-	0.696 (5.092)
$\phi_1$	0.576 (4.821)	0.009 (0.094)	0.507 (5.147)	0.494 (3.975)	0.446 (5.006)	0.049 (0.370)
$\phi_2$	-	0.107 (1.494)	-	-0.028 (-0.294)	-	-
$\phi_3$	-	-0.000 (-0.006)	-	0.261 (3.192)	-	-
$\phi_4$	-	-0.264 (-3.707)	-	-0.221 (-2.510)	-	-
$\phi_5$	-	-	-	-0.031 (-0.365)	-	-
$\theta_0$	0.770 (5.656)	-2.338 (-4.038)	1.040 (2.334)	-2.780 (-2.019)	1.458 (6.197)	-0.658 (-3.217)
$\theta_1$	-0.930 (0.178)	-0.430 (-2.336)	-0.678 (-3.907)	-0.994 (-1.618)	-0.646 (-3.988)	-0.178 (-1.112)
$\theta_2$	-	-0.497 (-2.238)	-	0.412 (0.444)	-	0.434 (3.819)
$\theta_3$	-	0.830 (4.129)	-	-0.255 (-0.225)	-	-
$\theta_4$	-	1.437 (3.900)	-	2.674 (1.334)	-	-
$\theta_5$	-	0.690 (2.760)	-	5.222 (2.883)	-	-
$\gamma$	69.726 (0.206)	2.327 (1.552)	23.183 (0.302)	1.482 (2.077)	13.650 (0.575)	30.751 (0.246)
$c_1$	-2.051 (-249.262)	-0.727 (-5.607)	-2.516 (-16.780)	-0.802 (-8.005)	-1.641 (-1.884)	-0.047 (-0.379)
$c_2$	0.593 (35.990)	3.537 (18.408)	2.860 (46.796)	2.324 (14.434)	1.655 (38.491)	2.537 (52.430)

**Nota:** A estatística  $t$  do coeficiente é apresentada entre parênteses.

**Tabela IX** – Raízes dos polinómios característicos dos regimes extremos dos modelos LSTAR1

País	Regimes	Raízes	Módulo
África do Sul	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.729	0.729
		$-0.314 \pm 0.334i$	0.459
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	0.316	0.316
		-0.232	0.232
		-2.093	2.093
China	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.719	0.719
		$-0.801 \pm 0.817i$	1.144
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	-0.824	0.824
		$0.376 \pm 0.218i$	0.434
Espanha	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.750	0.750
		-0.516	0.516
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	0.373	0.373
		-1.039	1.039
França	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	-0.640	0.640
		-1.476	1.476
		1.281	1.281
		-3.981	3.981
		$0.248 \pm 1.032i$	1.061
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	$0.017 \pm 0.515i$	0.515
		$-0.528 \pm 0.179i$	0.557
		$0.659 \pm 0.252i$	0.706
Portugal	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	-0.585	0.585
		0.868	0.868
		$-0.147 \pm 0.657i$	0.674
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	-0.341	3.496
		3.561	3.561
		$0.138 \pm 0.413i$	0.436
UE11	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.506	0.506
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	-0.641	0.641

**Nota:** As raízes dos polinómios calculadas são por vezes chamadas valores próprios da matriz de coeficientes da representação matricial do modelo AR.

**Tabela X** - Raízes dos polinómios característicos dos regimes extremos dos modelos LSTAR2

País	Regimes	Raízes	Módulo
Alemanha	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.576	0.576
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	-0.354	0.354
Austrália	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	$0.535 \pm 0.480i$	0.718
		$-0.530 \pm 0.480i$	0.715
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	1.128	1.128
		$-0.588 \pm 0.415i$	0.720
		$-0.186 \pm 1.071i$	1.087
Coreia do Sul	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.507	0.507
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	-0.171	0.171
Itália	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	-0.122	0.122
		$-0.346 \pm 0.605i$	0.697
		$0.654 \pm 0.309i$	0.724
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	1.502	1.502
		$-1.225 \pm 0.536i$	1.337
		$0.224 \pm 1.372i$	1.390
Japão	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.446	0.446
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	-0.199	0.199
Reino Unido	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 0$	0.049	0.049
	$G(\Delta y_{t-d}, \hat{\gamma}, \hat{c}) = 1$	0.597 -0.726	0.597 0.726

**Nota:** As raízes dos polinómios calculadas são por vezes chamadas valores próprios da matriz de coeficientes da representação matricial do modelo AR.

**Tabela XI** – Resultados dos testes de especificação (valor-p das estatísticas LM)

País	Teste de ausência de autocorrelação (2.25)	Teste de não linearidade adicional (2.27)				Teste de Estabilidade dos Parâmetros (2.30)		
	lag=8	$y_{t-1}$	$y_{t-2}$	$y_{t-3}$	$y_{t-4}$	$H_1$	$H_2$	$H_3$
África do Sul	0.350	0.186	0.000	0.145	0.056	0.000	0.000	-
Alemanha	0.352	0.916	0.997	0.848	0.389	0.010	0.010	0.006
Austrália	0.259	0.137	0.737	0.526	0.427	0.554	0.872	0.584
China	0.150	0.000	0.000	0.000	0.000	0.020	0.000	-
Coreia do Sul	0.217	0.325	0.056	0.584	8.19	0.216	0.415	0.729
Espanha	0.136	0.268	0.655	0.028	0.366	0.028	0.091	0.146
França	0.210	0.784	0.795	0.805	0.242	0.847	0.549	0.696
Itália	0.906	0.530	0.723	0.764	0.739	0.168	0.068	0.031
Japão	0.143	0.026	0.220	0.121	0.171	0.744	0.396	0.142
Portugal	0.699	0.059	0.474	0.393	0.524	0.025	0.081	-
Reino Unido	0.429	0.844	0.564	0.353	0.211	0.077	0.120	0.144
UE11	0.347	0.175	0.011	0.972	0.364	0.247	0.108	0.151

**Nota:**  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  são, respectivamente, funções de transição logísticas de primeira, segunda e terceira ordem.

Nos casos da África do Sul, China e Portugal não é possível realizar o teste de estabilidade de parâmetros para a função logística de terceira ordem, devido a problemas na inversão da matriz.

**Tabela XII** – Rácio da variância residual dos modelos STAR e AR

## Modelos LSTAR1

	África do sul	China	Espanha	França	Portugal	UE11
$\hat{\sigma}_u^2 / \hat{\sigma}_{uL}^2$	0.933	1.045	0.830	0.808	0.877	0.917

## Modelos LSTAR2

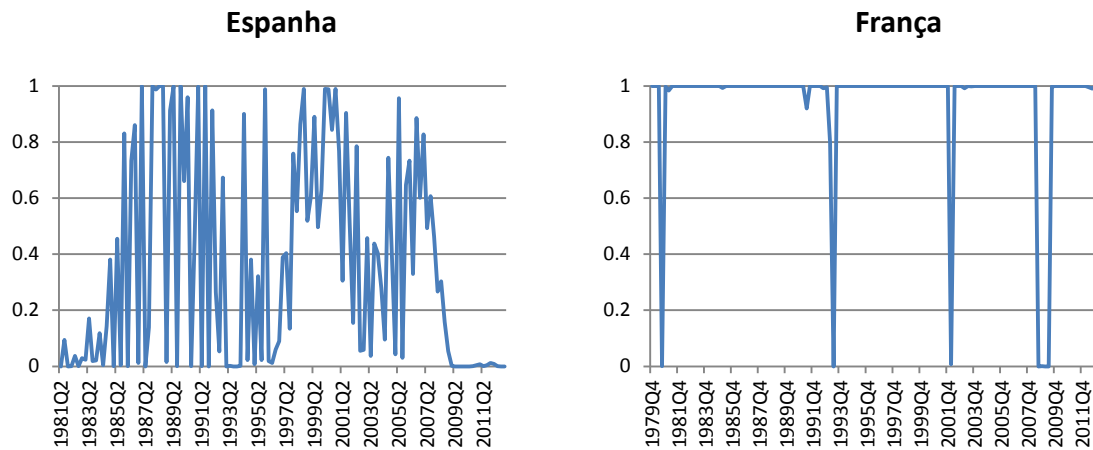
	Alemanha	Austrália	Coreia do Sul	Itália	Japão	Reino Unido
$\hat{\sigma}_u^2 / \hat{\sigma}_{uL}^2$	0.858	0.897	0.934	0.641	0.818	0.932

**Nota:**  $\hat{\sigma}_{uL}^2$  é a variância residual do modelo AR

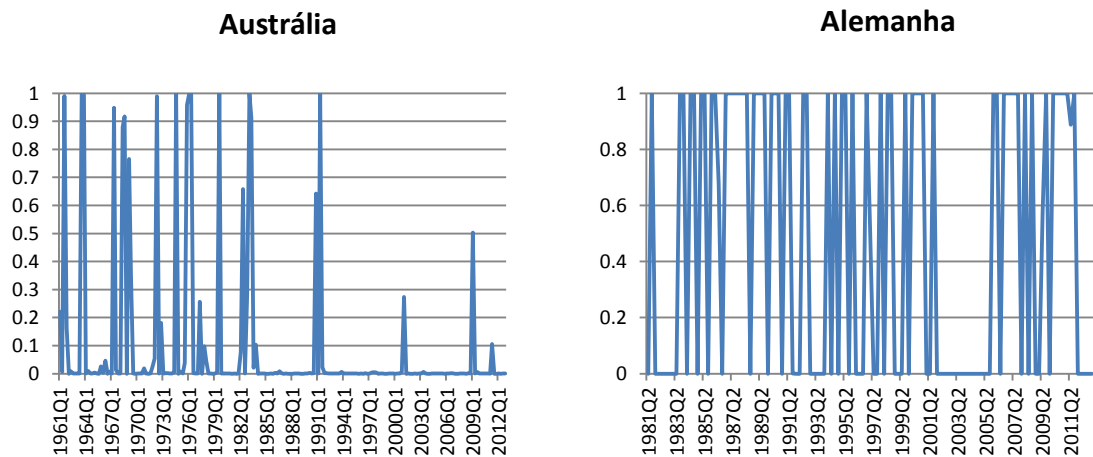


## Anexo B – Figuras

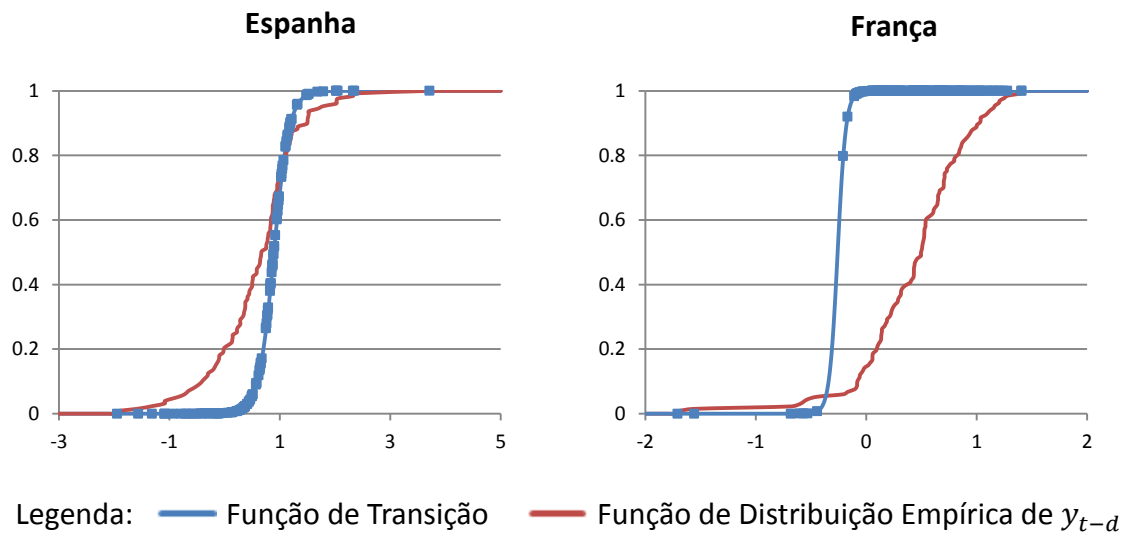
**Figura 1** - Valores da função de transição de modelos LSTAR1



**Figura 2** - Valores da função de transição de modelos LSTAR2



**Figura 3** - Funções de transição e Funções de Distribuição Empíricas dos modelos LSTAR1



**Figura 4** - Funções de transição e Funções de Distribuição Empíricas dos modelos LSTAR2

